4.2 Isotropic Vectors

Мы начинаем этот раздел с рассмотрения несколько нелогичного математического объекта. Мы видели, что точки (x, y) в декартовой плоскости можно рассматривать как "конечные точки" вещественных векторов OP = (x, y). Теперь рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 = 0, \tag{4.1}$$

который в поле действительных чисел имеет только тривиальное решение x = 0, y = 0. Но, используя комплексные числа, (4.1) может быть учтено с помощью

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - ixy + ixy = (x + iy)(x - iy) = 0. \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что все точки на комплексных прямых

$$y = \pm ix \tag{4.3}$$

принадлежат окружности нулевого радиуса (4.1)! Конечно, "магия" возникает при использовании комплексных координат; тем не менее удивительно, что бесконечно малая окружность может разделиться на две прямые линии.

Давайте теперь рассмотрим два вектора **z**$_1$, **z**$_2$, принадлежащих, соответственно, двум прямым (4.3)

$$z_1 = (1, i), \qquad z_2 = (1, -i). \tag{4.4}$$

(Мы не обозначаем эти векторы через z_1, z_2, поскольку, будучи комплексными, они не принадлежат нашему физическому пространству). Обратите внимание, что каждый $z^2 = 0$ (z^2 не следует путать с $z{*}z$). Эти комплексные векторы обладают очень интересным свойством быть *инвариантными при вращении*.

Все векторы можно поворачивать, но z_1, z_2 остаются фиксированными. Применение матрицы вращения (см.

главу 2) к z_1, мы находим:

$$R\, z_1 = \begin{Vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\theta - i\sin\theta \\ \sin\theta + i\cos\theta \end{Vmatrix} =$$
$$(\cos\theta - i\sin\theta) \begin{Vmatrix} 1 \\ i \end{Vmatrix} = e^{-i\theta} z_1. \tag{4.5}$$

Мы видим, что **z**$_1$ и **z**$_2$ являются собственными векторами матрицы вращения для любого значения θ с соответствующими собственными значениями $e^{\mp i\theta}$, которые являются просто фазовыми коэффициентами величины 1; **z**$_1$ и **z**$_2$ называются *изотропными векторами*.

Если мы остаемся в вещественной плоскости R^2 или в ее комплексном обобщении C^2 (двухкомпонентные комплексные векторы), других инвариантных векторов относительно матрицы вращения нет. Но если мы рассмотрим вращения в физическом трехмерном пространстве R^3, то существует еще одно инвариантное направление - направление оси вращения. Например, рассматривая вращение R_z в плоскости *x–y*

$$R_z = \begin{Vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{4.6}$$

Вращение происходит вокруг оси z, а изотропные векторы Z_1, Z_2 (мы используем заглавные буквы, чтобы указать, что теперь они трехмерны):

$$Z_1 = (1, i, 0), \qquad Z_2 = (1, -i, 0). \tag{4.7}$$

В дальнейшем мы увидим, что изотропные векторы тесно связаны с представлением спина для элементарных частиц.

Случайное философское наблюдение: люди существовали сотни тысяч лет, прежде чем нашли техническое применение оси вращения, а именно колесу; математики поняли важность изотропных векторов Z_1, Z_2 всего столетие назад. Но Природа знала о них все с незапамятных времен, неявно используя их во вращении звезд и планет и во вращении частиц.

4.3 The Stereographic Projection

Элегантный способ ввести квантово-механический спин частиц состоит в том, чтобы установить соответствие между точками P с координатами (x, y, z) на сфере радиуса 1, удовлетворяющий уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad (4.8)$$

и точки в комплексной плоскости.Мы также увидим, что существует тесное соответствие между двумя изотропными направлениями, Z_1, Z_2 в уравнении (4.7) и представлениемb спиновых состояний, которые демонстрируют аналогичное поведение при вращении. Кроме того, как мы увидим, математическое описание вращения обязательно будет включать комплексные переменные.

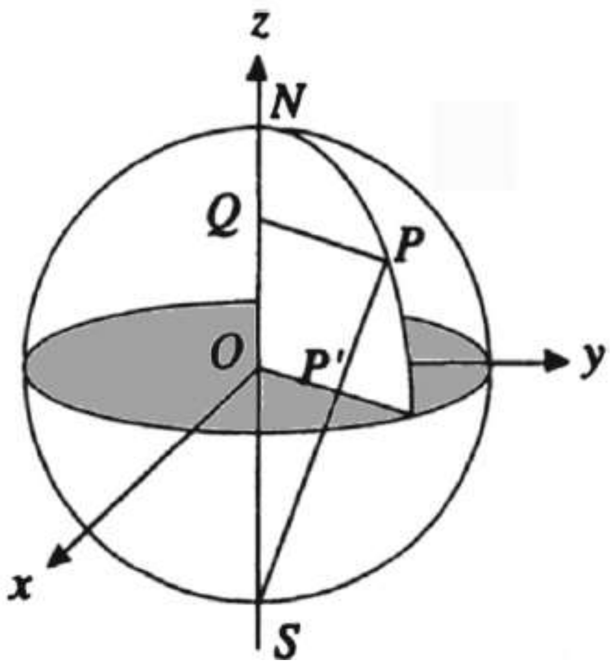

Рис. 4.6 Стереографическая проекция единичной сферы с южного полюса S на плоскость z = 0. Она отображает северное полушарие на область лежащую внутри единичной окружности. Южное полушарие отображается на область за пределами единичной окружности. Экватор совпадает с единичной окружностью. Чем ближе P к S, тем дальше P′ от O в заштрихованной плоскости.

Пусть O(0, 0, 0) - центр сферы, N(0, 0, 1) - северный полюс, а S(0, 0, -1) южный полюс (см. рис. 4.6). Пусть P'(x′, y′, 0) - пересечение прямой SP с экваториальной плоскостью z = 0, а Q(0, 0, z) – проекция P(x, y, z) на ось z. P' называется стереографической проекцией P. Из подобных треугольников SOP' и SQP мы находим:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{SO}{SQ} = \frac{1}{1+z}. \qquad (4.9)$$

Теперь введем в плоскости z = 0 комплексную переменную ζ

$$\zeta = x' + iy' = \frac{x+iy}{1+z}, \qquad (4.10)$$

Полезно записать ζ как отношение двух комплексных чисел

$$\zeta = \frac{\phi}{\psi}, \qquad \phi = \alpha(x+iy), \qquad \psi = \alpha(1+z), \qquad (4.11)$$

где α - константа, подлежащая определению. Возможно, мы могли бы предположить, что вектор (ψ, ϕ) может представлять квантово-механическое спиновое состояние, связанное с фундаментальными частицами материи: электронами, протонами, нейтронами и т.д. Термин "спин" подразумевает вращение, поскольку пионеры квантовой теории первоначально представляли электрон в виде крошечной вращающейся сферы. В нашем случае ось вращения параллельна P(x, y, z). Например, если вращение происходит вокруг оси z, один изотропный вектор может быть $\left\|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\|$, соответствующий состоянию *spin-up*. Спиновое состояние представлено спинором $\left\|\begin{matrix}\psi\\\phi\end{matrix}\right\|$, принадлежащему C^2 - двумерному комплексному векторному пространству. Два вектора |u⟩ , |v⟩ образуют ортонормированный базис в C^2, если они имеют единичную длину и ортогональны

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = 1, \qquad \langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = 0. \tag{4.12}$$

Поскольку квантовые состояния представлены векторами единичной длины, спинор $|\Psi\rangle = \left\|\begin{matrix}\psi\\\phi\end{matrix}\right\|$ должен подчиняться условию

$$\langle \Psi|\Psi\rangle = \psi^*\psi + \phi^*\phi = |\psi|^2 + |\phi|^2 = 1. \tag{4.13}$$

Используя 4.8) и (4.11) найдем

$$|\psi|^2 + |\phi|^2 = |\alpha|^2\left[x^2 + y^2 + (1+z)^2\right] = |\alpha|^2(2+2z) = 1, \tag{4.14}$$

которое определяет постоянную α

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2(1+z)}}. \tag{4.15}$$

с точностью до фазового коэффициента $e^{i\varphi}$. Взяв комплексное сопряжение из (4.11), мы имеем

$$\psi^* = \alpha^*(1+z), \qquad \phi^* = \alpha^*(x - iy). \tag{4.16}$$

Из уравнений (4.11) и (4.14) вытекают следующие соотношения между спинором $|\Psi\rangle = \left\|\begin{matrix}\psi\\\phi\end{matrix}\right\|$ и вектор $\overrightarrow{OP}$ = (x, y, z) может быть выведено:

$$x = \psi\phi^* + \psi^*\phi, \qquad y = i(\psi\phi^* - \psi^*\phi), \qquad z = \psi\psi^* - \phi\phi^*. \tag{4.17}$$

Путем элементарных вычислений, используя (4.8):

(1) $|\alpha|^2\Big[(1+z)(x-iy) + (1+z)(x+iy)\Big] = 2|\alpha|^2(1+z)x = x;$

(2) $i|\alpha|^2\Big[(1+z)(x-iy) - (1+z)(x+iy)\Big] = 2|\alpha|^2(1+z)y = y;$

(3) $|\alpha|^2\Big[(1+z)^2 - x^2 - y^2\Big] = |\alpha|^2\Big[(1+z^2+2z-x^2-y^2\Big] = |\alpha|^2\Big[x^2+y^2+z^2+z^2+2z-x^2-y^2\Big] = 2|\alpha|^2(1+z)z = z.$

Обратите внимание, что в то время как спинор (ψ, ϕ) однозначно определяет вектор $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (x,y,z), обратное неверно, поскольку α определяется только с точностью до фазового коэффициента $e^{i\varphi}$. В частности, спинор |Ψ⟩ = (ψ, ϕ) и спинор −|Ψ⟩ = (−ψ,−ϕ) соответствуют одному и тому же вектору $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (x,y,z).

В начале этого раздела мы показали, что точке $P(x, y, z)$ сферы радиуса 1 соответствует (с точностью до фазового коэффициента $e^{i\varphi}$) комплексный спинор $|\Psi\rangle = \begin{Vmatrix} \psi \\ \phi \end{Vmatrix}$ нормы 1. Легко проверить, что $|\Psi\rangle$ является собственным вектором эрмитовой матрицы

$$H = H(\overrightarrow{OP}) = \begin{Vmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{Vmatrix}, \tag{4.18}$$

с собственным значением +1:

$$\begin{aligned} H|\Psi\rangle &= \begin{Vmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \psi \\ \phi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} z\psi + (x - iy)\phi \\ (x + iy)\psi - z\phi \end{Vmatrix} = \\ \alpha &\begin{Vmatrix} z(1 + z) + x^2 + y^2 \\ (x + iy)(1 + z) - z(x + iy) \end{Vmatrix} = \alpha \begin{Vmatrix} 1 + z \\ x + iy \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \psi \\ \phi \end{Vmatrix} = |\Psi\rangle. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Обозначим через $|\Phi\rangle = (X, Y)$ второй нормированный собственный вектор H; $|\Phi\rangle$ должен удовлетворять условиям

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = 1, \qquad \langle\Psi|\Phi\rangle = 0. \tag{4.20}$$

Таким образом,

$$X\psi^* + Y\phi^* = 0, \quad X^*X + Y^*Y = 1$$

и мы можем установить:

$$X = \phi^*, \qquad Y = -\psi^*,$$

и, следовательно,

$$|\Phi\rangle = \begin{Vmatrix} \phi^* \\ -\psi^* \end{Vmatrix}. \tag{4.21}$$

Очевидно, что $H|\Phi\rangle = -|\Phi\rangle$; так что собственное значение $|\Phi\rangle$ равно -1.

Матрица H представляет собой физическую наблюдаемую, проекцию вращения в направлении $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. Возможные результаты измерения равны +1 или -1. В первом случае, после измерения спиновое состояние равно Ψ, мы можем сказать, что спин параллелен $\overrightarrow{OP}$; в последнем случае спиновое состояние равно $|\Phi\rangle$, а спин антипараллелен $\overrightarrow{OP}$. Эта интерпретация согласуется со следующим: изменяя $\overrightarrow{OP}$ на $-\overrightarrow{OP}$ мы получаем :

$$H(-\overrightarrow{OP}) = \begin{Vmatrix} -z & -x + iy \\ -x - iy & z \end{Vmatrix} = -H(\overrightarrow{OP}), \tag{4.22}$$

таким образом, собственные значения меняются местами

$$H(-\overrightarrow{OP})|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle, \qquad H(-\overrightarrow{OP})|\Phi\rangle = |\Phi\rangle. \tag{4.23}$$

Если $x = y = 0$, $z = 1$, $\overrightarrow{OP}$ совпадает с северным полюсом $\overrightarrow{ON}$ и H диагональная матрица

$$H(\overrightarrow{ON}) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}. \tag{4.24}$$

Собственные векторы равны $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Предположим, теперь мы измеряем $H(\overrightarrow{ON})$ на произвольном спиноре $|\Psi\rangle = (\psi, \phi)$. Вероятности *p1, p2* получения результатов +1 и -1 соответственно

$$|\langle \mathbf{e}_1|\Psi\rangle|^2 = |\psi|^2, \qquad |\langle \mathbf{e}_2|\Psi\rangle|^2 = |\phi|^2. \tag{4.25}$$

Из (4.11) и (4.15) мы видим, что вероятности *p1* и *p2* зависят только от z

$$p_1 = |\psi|^2 = \frac{1+z}{2}, \qquad p_2 = |\phi|^2 = \frac{1-z}{2}. \tag{4.26}$$

Этот результат является разумным: если $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON}$, z = 1, так что p1 = 1 и p2 = 0; если $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS}$ (южный полюс), z = -1, p1 = 0 и p2 = 1. Наконец, если $\overrightarrow{OP}$ лежит где-то на экваториальной окружности, z = 0, и две вероятности равны: *p1 = p2 = 1/2*.

Как упоминалось в начале этого раздела, мы можем доказать, что существует соответствие между изотропными векторами и спинорами. Во-первых, давайте обобщим понятие изотропных векторов на произвольную плоскость. Уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \tag{4.27}$$

допускает только решение x = y = z = 0 в реальном поле. Однако в комплексной области существует бесконечное число решений. В плоскости z = 0 мы находим инвариантные векторы Z_1, Z_2 из уравнения (4.7). Например, x = 3, y = 4, z = 5i и т.д. Все эти векторы определяют анизотропное направление. Давайте теперь рассмотрим плоскость π через начало координат, и пусть $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}$ - два ортонормированных вектора, принадлежащих π. Пусть **n** – единичный вектор, ортогональный π (см. рис.4.7). Следовательно, $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{n}\}$ образует ортонормированный базис. Поскольку оба множества $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ и $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}\}$ являются ортонормированными базисами, мы можем использовать следующее соответствие между векторами, относящимися к плоскости z = 0, и векторами, принадлежащими π (таблица 4.1).

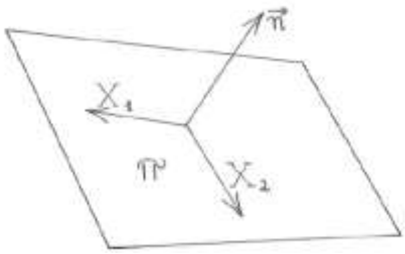

Рис. 4.7 Ось вращения **n** плоскости π и два ортонормированных вектора $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$ лежащих в этой плоскости

Table 4.1 Relationship between vectors

Plane $z = 0$ normal $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$	Plane π normal $\mathbf{n}$
$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2(0, 1, 0)$	$\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2$
$Z_1 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2;\ Z_2 = \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$	$Z_1 = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2;\ Z_2 = \mathbf{X}_1 - i\mathbf{X}_2$

$\mathbf{Z_1} = \mathbf{X_1} + i\mathbf{X_2}$ и $\mathbf{Z_2} = \mathbf{X_1} - i\mathbf{X_2}$ принадлежат π, поскольку $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ принадлежат этой плоскости, в то время как $\mathbf{Z_1}$ и $\mathbf{Z_2}$ являются изотропными направлениями в плоскости π. Действительно, мы можем записать, используя обычное (не эрмитово) скалярное произведение

$$\begin{gathered}(Z_1, Z_1) = (\mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2) = \\ (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) + i(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) + i(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1) - (\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_2) = +1 - 1 = 0,\end{gathered} \tag{4.28}$$

и аналогично $(Z_2, Z_2) = 0$.

В качестве примера: пусть **n** - вектор $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, и **R** = (x, y, z) произвольный вектор. Условие, что **R** принадлежит π, равно (**n, R**) = 0, или

$$x + y + z = 0. \tag{4.29}$$

Мы можем выбрать:

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \qquad \mathbf{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2). \tag{4.30}$$

Таким образом, изотропные направления π могут быть выбраны как

$$Z_{1,2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{6}},\ \mp 2i\right) \tag{4.31}$$

Возвращаясь к общему случаю, мы отождествляем единичный вектор **n** = (n1, n2, n3) с вектором $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ к сфере радиуса 1 в стереографической проекции (см. рис. 4.6). Мы по-прежнему обозначаем через π плоскость, проходящую через начало координат, ортогональное **n**, и через $Z_1 = (a, b, c)$, $Z_2 = (a^*, b^*, c^*)$ два изотропных вектора π. Мы докажем следующее:

Теорема 4.*1* *Предположим, что спин частицы параллелен направлению* ***n*** *= (n1, n2, n3) физического пространства. Тогда две компоненты ψ, φ соответствующего спинора связаны с изотропными направлениями π следующими простыми формулами*:

$$\psi^2 = \frac{1}{2}(a - ib), \qquad \phi^2 = -\frac{1}{2}(a + ib), \qquad -2\psi\phi = c \tag{4.32}$$

Доказательство Ясно (4.32) эквивалентно

$$a = \psi^2 - \phi^2, \qquad b = i(\psi^2 + \phi^2), \qquad c = -2\psi\phi. \tag{4.33}$$

Теорема может быть доказана в два этапа

(1) Покажите, что вектор (a, b, c), как определено уравнением (4.33), является изотропным;

(2) Покажите, что он принадлежит π.

Шаг (1) выполняется легко, поскольку

$$a^2 + b^2 + c^2 = (\psi^2 - \phi^2)^2 - (\psi^2 + \phi^2)^2 + 4\psi^2\phi^2 = 0 \tag{4.34}$$

Чтобы доказать шаг (2), мы вычисляем скалярное произведение (*a, b, c*) с (n_1, n_2, n_3); но сначала давайте немного изменим (4.11), используя $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2(1+z)}}$. Поскольку теперь (*x, y, z*) = (n_1, n_2, n_3), мы имеем

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2(1+n_3)}}(1 + n_3), \qquad \phi = \frac{1}{\sqrt{2(1+n_3)}}(n_1 + in_2). \tag{4.35}$$

Из (4.35) и (4.33) имеем следующие выражения

$$a = \psi^2 - \phi^2 = \frac{1}{2(1+n_3)}\Big[(1+n_3)^2 - (n_1^2 - n_2^2 + 2in_1n_2)\Big], \tag{4.36}$$

$$b = i(\psi^2 + \phi^2) = \frac{i}{2(1+n_3)}\Big[(1+n_3)^2 + (n_1^2 - n_2^2 + 2in_1n_2)\Big], \tag{4.37}$$

$$c = -2\psi\phi = \frac{1}{2(1+n_3)}\Big[-2(1+n_3)(n_1 + in_2)\Big]. \tag{4.38}$$

Пренебрегая общим фактором множителем $\frac{1}{2(1+n_3)}$, умножьте выражения (4.36)–(4.38) на n_1, n_2, n_3, соответственно и сложите три результата и докажите, что как действительная, так и мнимая часть ($\mathbf{n}$, Z_1) = $an_1 + bn_2 + cn_3$ обращаются в нуль. Таким образом, (a, b, c) является изотропным вектором, принадлежащим π. Теорема доказана. Поскольку в формулах (4.32) и (4.33), квадраты ψ^2, φ^2 линейно связаны с a, b, c, иногда предполагается, что “*спиноры являются квадратными корнями из векторов*”.

Обратите внимание, что двумерный вектор может быть представлен комплексным числом $z = x + iy = re^{i\vartheta}$. Квадратный корень равен $\sqrt{z} = \sqrt{x+iy} = \sqrt{r}\cdot e^{i\vartheta/2}$, и содержит половинный угол, характерный для спиноров.

Давайте теперь рассмотрим, что происходит со спинором (ψ, φ), когда мы выполняем *вращение* R в физическом пространстве. В простейшем случае $R = R_z$ (уравнение (4.6)), поворот на угол θ в плоскости xy

$$R_z = \left\|\begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|. \tag{4.39}$$

Из (4.7) нам известно, что

$$Z_1 = \left\|\begin{matrix} 1 \\ i \\ 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\|, \qquad Z_2 = \left\|\begin{matrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a^* \\ b^* \\ c^* \end{matrix}\right\|, \tag{4.40}$$

и из (4.32) мы находим векторы, соответствующие спинорам $\left\|\begin{matrix} \psi_1 \\ \phi_1 \end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix} \psi_2 \\ \phi_2 \end{matrix}\right\|$:

$$\left\|\begin{matrix} \psi_1^2 \\ \phi_1^2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{a-ib}{2} \\ -\frac{a+ib}{2} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right\|, \qquad \left\|\begin{matrix} \psi_2^2 \\ \phi_2^2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{a^*-ib^*}{2} \\ -\frac{a^*+ib^*}{2} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}\right\|. \tag{4.41}$$

Поскольку Z_1 и Z_2 инвариантны относительно вращения, мы имеем (см. (4.5)):

$$R_z Z_1 = e^{-i\theta}\, Z_1, \qquad R_z Z_2 = e^{i\theta}\, Z_2. \tag{4.42}$$

Таким образом действие R_z эквивалентно умножению $\left\|\begin{matrix} \psi_1^2 \\ \phi_1^2 \end{matrix}\right\|$ и $\left\|\begin{matrix} \psi_2^2 \\ \phi_2^2 \end{matrix}\right\|$ на $e^{-i\theta}$ и $e^{i\theta}$ соответственно;

следовательно, спиноры $\left\|\begin{matrix} \psi_1 \\ \phi_1 \end{matrix}\right\|$ и $\left\|\begin{matrix} \psi_2 \\ \phi_2 \end{matrix}\right\|$ будут умножены на $e^{\mp i\theta/2}$.

Этот результат является общим: поворот на угол θ в физическом пространстве соответствует “повороту” θ / 2 в спинорном пространстве. Чтобы ”доказать" это утверждение, давайте проведем некоторую “экспериментальную математику”, изучив другие соответствующие частные случаи (которые будут полезны в дальнейшем).

Пусть R_x, R_y представляют собой вращения на угол θ в плоскостях *y–z* и *z–y* соответственно

$$R_x = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{matrix}\right\|, \qquad R_y = \left\|\begin{matrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{matrix}\right\| \tag{4.43}$$

Эти соотношения можно свести в таблицу.

Table 4.2 Rotations and spinors

Rotation axis **n**	Rotation matrix	Isotropic vector Z_1	$\psi^2 = \frac{a-ib}{2}$	$\phi^2 = \frac{-a-ib}{2}$	Spin-up spinor $\lvert\Phi_1\rangle = (\psi, \phi)$	Spin-down spinor $\lvert\Phi_2\rangle = (\phi^*, -\psi^*)$	matrix H $H = \begin{Vmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{Vmatrix}$
$\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$	R_x	$\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{Vmatrix}$	$-\frac{i}{2}$	$-\frac{i}{2}$	$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1-i \\ 1-i \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1+i \\ -1-i \end{Vmatrix}$	$\sigma_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$
$\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$	R_y	$\begin{Vmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$	$-\frac{i}{2}$	$+\frac{i}{2}$	$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1-i \\ 1+i \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1-i \\ -1-i \end{Vmatrix}$	$\sigma_y = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}$
$\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$	R_z	$\begin{Vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{Vmatrix}$	1	0	$\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$	$\sigma_z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$

В таблице 4.2 очень просто проверить уравнения на собственные значения (4.5) для $R = R_x$ и $R = R_y$; собственные значения всегда равны $e^{+i\theta}$, а собственные векторы являются изотропными

векторами. Значения ψ^2 и ϕ^2, приведенные в таблице, следуют сразу же. Поскольку ψ^2 и ϕ^2 линейно зависят от *a* и *b*, если мы выполним вращение, они будут умножены на $e^{i\theta}$, и все работает так же, как в случае R_z. *Spin-up* спинор $\begin{Vmatrix} \psi \\ \phi \end{Vmatrix}$ поворачивается умножением на $e^{-i\theta/2}$ а *spin-down* спинор $\begin{Vmatrix} \phi^* \\ -\psi^* \end{Vmatrix}$ умножением на $e^{i\theta/2}$.

В последнем столбце таблицы 4.2 указаны три частных случая наблюдаемого H. Мы напоминаем, что H представляет компоненты вращения в направлении **n** = (n_1, n_2, n_3). Для трех случаев: **n** = (1, 0, 0), **n** = (0, 1, 0), **n** = (0, 0, 1) соответствующие H-матрицы являются известными спиновыми матрицами Паули σ_x, σ_y, σ_z соответственно

$$\sigma_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}. \tag{4.44}$$

Рассматривая σ_x, σ_y, σ_z как компоненты вектора $\boldsymbol{\sigma}$, мы можем записать формально: $H = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = n_1\sigma_x + n_2\sigma_x + n_3\sigma_z$. Таким образом, σ_x, σ_y, σ_z представляют компоненты вращения в направлениях трех осей, а H представляет компонент вращения в направлении **n**. Конечно, эти компоненты являются не числами, а матрицами. Собственные значения спиновых матриц равны ±1 (см. (4.19)), а собственные векторы являются соответствующими спинорами для состояний со спином вверх и спином вниз.

Поучительно сравнить представление ортогональных состояний в реальных трехмерных пространстве к этому в гильбертовом пространстве. Две противоположные пространственные ориентации спина -(½) частицы, вверх (↑) и вниз (↓), находятся на расстоянии 180° друг от друга. Но в гильбертовом пространстве, ортогональные векторы или спиноры ориентированы перпендикулярно, на расстоянии 90° друг от друга. Это объясняет появление половинных углов (таких как θ/ 2) в формулах, включающих спиноры.

4.3.1 Spinors in Spherical Coordinates

Поучительный альтернативный подход к предыдущим результатам можно найти, выразив **n** = (n1, n2, n3) в сферических полярных координатах. Поскольку **n** лежит на единичной сфере, мы находим для ее компонентов $n_1 = \sin\theta\cos\varphi$, $n_2 = \sin\theta\sin\varphi$, $n_3 = \cos\theta$. Обратите также внимание на комбинации: $n_1 \pm in_2 = \sin\theta e^{\pm i\varphi}$. Эрмитов оператор H в уравнении (4.18) может быть выражен в сферических координатах как

$$H = \mathbf{n}\cdot\sigma = \begin{Vmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{Vmatrix}. \tag{4.45}$$

Ранее было установлено, что собственные значения вращения в любом направлении равны ±1, которые

мы также называем spin-up (↑) и spin-down (↓) соответственно. Теперь пусть
$|\Psi(\theta)\uparrow\rangle = \left\|\begin{matrix}\psi \\ \phi\end{matrix}\right\|$ - собственный вектор H с собственным значением +1, так что

$$\left\|\begin{matrix}\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\psi \\ \phi\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\psi \\ \phi\end{matrix}\right\|. \qquad (4.46)$$

Раскрыв матричное уравнение, мы находим

$$(\cos\theta)\psi + (\sin\theta\, e^{-i\varphi})\phi = \psi, \qquad (\sin\theta\, e^{i\varphi})\psi - (\cos\theta)\phi = \phi. \qquad (4.47)$$

Второе уравнение может быть преобразовано в

$$(\sin\theta\, e^{i\varphi})\psi - (1+\cos\theta)\phi = 0. \qquad (4.48)$$

Очевидным решением является $\psi = \mathrm{const}\,(1 + \cos\theta)$, $\phi = \mathrm{const}\,\sin\theta\, e^{i\varphi}$. Константа может быть определена условием нормализации $|\psi|^2 + |\phi|^2 = 1$, что приводит к

$$\mathrm{const} = \pm 1/\sqrt{2+2\cos\theta}.$$

Выбрав знак +, мы можем написать

$$\psi = \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{2+2\cos\theta}} \qquad \phi = \frac{\sin\theta\, e^{i\varphi}}{\sqrt{2+2\cos\theta}}. \qquad (4.49)$$

Теперь мы используем два тригонометрических тождества для половинных углов

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad (4.50)$$

что упрощает (4.49) до

$$\psi = \cos\frac{\theta}{2}, \qquad \phi = \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}. \qquad (4.51)$$

Наконец, спинор для собственного значения +1 (спин-вверх ↑) может быть записан:

$$|\Psi(\theta)\uparrow\rangle = \left\|\begin{matrix}\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi}\end{matrix}\right\|. \qquad (4.52)$$

С помощью аналогичного анализа для собственного значения -1 (спин-вниз ↓) можно показать, что

$$|\Psi(\theta)\downarrow\rangle = \left\|\begin{matrix}\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2)e^{i\varphi}\end{matrix}\right\|. \qquad (4.53)$$

Совершенно ясно, что спиноры (4.52) и (4.53) взаимно ортогональны.
Для этого гильбертова пространства базисными спинорами являются состояния спин-вверх |↑⟩ и спин- вниз |↓⟩ вдоль вертикальной оси (θ = 0):

$$|\uparrow\rangle = \left\|\begin{matrix}1 \\ 0\end{matrix}\right\| \qquad |\downarrow\rangle = \left\|\begin{matrix}0 \\ 1\end{matrix}\right\|. \qquad (4.54)$$

Таким образом, спиноры (4.52) и (4.53) могут быть выражены в виде линейных комбинаций

$$|\Psi(\theta)\uparrow\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|\downarrow\rangle, \; |\Psi(\theta)\downarrow\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|\downarrow\rangle. \; (4.55)$$

При измерении z-спиновой компоненты вероятности наблюдения спин-вверх и спин-вниз в состоянии |Ψ(θ) ↑⟩ равны соответственно,

$$p(\uparrow) = |\langle\uparrow|\Psi(\theta)\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} \qquad p(\downarrow) = |\langle\downarrow|\Psi(\theta)\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}. \quad (4.56)$$

Следует отметить, что эти соотношения применимы к одному электронному спину. В следующей главе мы будем иметь дело с аналогичными измерениями в двухэлектронной системе.